Automorphismes de S_n | Leçons : 103, 104, 105, 108, 190

Thm : Si $n \neq 6$, les automorphismes de S_n sont intérieurs.

Preuve :

$\boxed{\text{Etape 1}}$ Soit $\sigma \in S_n$ d'ordre 2, on dénombre les $\Theta \in S_n$ telles que $\sigma \circ \Theta = \Theta \circ \sigma$

σ est un élément d'ordre 2, c'est donc un produit $\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$ de transpositions à supports disjoints.

Pour $\Theta \in S_n$ on a $\Theta \circ \sigma \circ \Theta^{-1} = (\Theta \circ \tau_1 \circ \Theta^{-1}) \circ \dots \circ (\Theta \circ \tau_k \circ \Theta^{-1})$

et les $\Theta \circ \tau_i \circ \Theta^{-1}$ sont des transpositions à supports disjoints

~~D'où~~ Car $\Theta \circ (a\ b) \circ \Theta^{-1} = (\Theta(a)\ \Theta(b))$.

Or Θ commute avec σ si et seulement si $\Theta \circ \sigma \circ \Theta^{-1} = \sigma$, on a donc ssi uniquement si $\Theta \circ \tau_i \circ \Theta^{-1}$ sont les ~~permut~~ transpo° τ_j à permuta° près.

(Par unicité de la décomposition en produit de cycles à supports disjoints)

Les candidats Θ sont donc ceux qui induisent une permutation des supports $\{a_1, b_1\}, \dots, \{a_k, b_k\}$ des transposi° respectives $\tau_1, \dots, \tau_k$.

- Il y a $k!$ manières de permuter ces supports
- Pour chaque permutation on a 2^k manières de définir Θ sur $\{a_1, b_1, \dots, a_k, b_k\}$ car si on envoie $\{a_i, b_i\}$ sur $\{a_j, b_j\}$ on a $\begin{cases} a_i \to a_j \\ b_i \to b_j \end{cases}$ ou $\begin{cases} a_i \to b_j \\ b_i \to a_j \end{cases}$
- Il y a $(n-2k)!$ manières de de permuter les éléments qui ne sont pas dans le support des τ_i

D'où le centralisateur de σ est de cardinal $2^k k! (n-2k)!$

$\boxed{\text{Etape 2}}$ On montre que $\varphi \in \mathrm{Aut}(S_n)$ envoie une transposition sur une transposition.

L'ensemble des transpositions forme une partie génératrice de S_n.

Ainsi, φ sera entièrement déterminé si l'on connaît l'image par φ des transpositions

Si τ est une transposition alors $\varphi(\tau)$ est d'ordre 2, donc se décompose en produits de k transpositions à supports disjoints.

Mais on a que le centralisateur de $\varphi(\tau)$ est isomorphe à celui de τ donc de même cardinal (*)

D'où d'après l'étape 1 on a $\underbrace{2(n-2)!}_{k=1} = 2^k k! (n-2k)!$

D'où $k! \, 2^{k-1} = (n-2) \dots (n-2k+1)$

- Si $k=2$ on a $(n-2)(n-3)=4$ qui n'a pas de sol° dans $\mathbb{N}$.
- Si $k\geq 3$ on a $\binom{n-k}{k}(n-2)\dots(n-k+1) = 2^{k-1}$

Ceci n'est possible que si $n-k+1=n-2 \Rightarrow k=3$

Mais alors $\binom{n-3}{3}(n-2)=4 \Rightarrow n=6$ cas qui est écarté

D'où $k=1$

Donc $\varphi(\tau)$ est une transposition.

$\boxed{\text{Etape 3}}$ On montre qu'un automorphisme qui envoie les transpositions sur les transpositions est intérieur

φ étant un morphisme, il suffit de montrer qu'il est intérieur sur un ensemble de générateurs de S_n pour montrer $\varphi\in \mathrm{Int}(S_n)$.

- On s'intéresse donc à la famille $((1,k))_{k\in[\![2,n]\!]}$ qui engendre S_n.
- Il existe donc $a_1\neq a_2$ et $a\neq b$ tels que

$$\varphi((1,2)) = (a_1, a_2) \quad \text{et} \quad \varphi((1,3)) = (a,b)$$

commuter $\Leftrightarrow$ être à supports disjoints

$(1,2)$ et $(1,3)$ ne commutent pas donc (a_1,a_2) et (a,b) non plus on a donc

$\mathrm{Supp}(1,2) \cap \mathrm{Supp}(1,3) = \{a_1,a_2\}\cap\{a,b\}\neq\emptyset$

On prend alors $a=a_1$ et on note $b=a_3$ d'où $\varphi((1,3))=(a_1,a_3)$

On a que $a_2\neq a_3$ par injectivité de φ.

- De même $(1,4)$ ne commute ni avec $(1,3)$ ni avec $(1,2)$ d'où $\mathrm{Supp}(1,2)\cap\mathrm{Supp}(1,3)\cap\mathrm{Supp}(1,4)\neq\emptyset$

Si on suppose que $(1,4)=(a_2\, a_3)$ alors $\varphi((1,2)(1,3)(1,4)) = (a_1\, a_2)(a_1\, a_3)(a_2\, a_3) = (a_1\, a_3) = \varphi((1,3))$

D'où $(1,2)(1,3)(1,4) = (1,3)$ ce qui est faux

D'où $a_1\in\mathrm{Supp}(1,4)$ et $a_4\neq a_1,a_2,a_3$ et $\varphi((1,4)) = (a_1,a_4)$

- On répète l'argument on a a_i tq $\varphi((1,i)) = (a_1,a_i)$, $\mathrm{Supp}(1,2)\cap\dots\cap\mathrm{Supp}(1,i)\neq\emptyset$

car $(1,i)$ ne commute pas avec $(1,2)$ ni....

On a donc construit une permutation

$\sigma : i\mapsto a_i$ tq $\sigma(1,i)\sigma^{-1} = (a_1,a_i) = \varphi((1,i))$

Comme les $(1,i)$ engendrent S_n on a $\varphi(x)=\sigma x\sigma^{-1}$ $\forall x\in S_n$

D'où $\varphi\in \mathrm{Int}\, S_n$

Perrin + FGN 1 Algèbre.

COMPLEMENT

- τ transposition $\Rightarrow$ $\varphi(\tau)$ ordre 2 par propriété d'un automorphisme de groupe
  $\varphi^2(\tau) = \varphi(\tau \circ \tau) = \mathrm{Id}$

- (*) $\mathrm{Stab}(\tau) \simeq \mathrm{Stab}(\varphi(\tau))$ car si $e \in \mathrm{Stab}(\tau)$ $e \circ \tau \circ e^{-1} = \tau \Rightarrow \varphi(e) \circ \varphi(\tau) \circ \varphi(e)^{-1} = \varphi(\tau)$
  $\Rightarrow \varphi(e) \in \mathrm{Stab}(\varphi(\tau))$
  gà l'isomorphisme.

- Si $\mathrm{Supp}(\sigma) \cap \mathrm{Supp}(\sigma') = \emptyset$ alors $\sigma \circ \sigma' = \sigma' \circ \sigma$
  En effet si $\sigma(x) = x = \sigma'(x)$ alors $\sigma' \circ \sigma(x) = \sigma \circ \sigma'(x)$
  si $x \in \mathrm{Supp}(\sigma)$ alors $x \notin \mathrm{Supp}(\sigma')$ d'où $\sigma'(x) = x$ d'où $\sigma \circ \sigma'(x) = \sigma(x)$
  mais $\sigma(x) \in \mathrm{Supp}(\sigma)$ d'où $\sigma(x) \notin \mathrm{Supp}(\sigma')$ d'où $\sigma' \circ \sigma(x) = \sigma(x) = \sigma \circ \sigma'(x)$
  On vérifie de même avec $x \in \mathrm{Supp}(\sigma')$

- $\mathfrak{S}_n$ est engendré par $((1,k))_{1 \leq k \leq n}$ car $(i,j) = (1,i)(1,j)(1,i)$ et $((i,j))$ engendre $\mathfrak{S}_n$.